IUT A CHIMIE - MATHEMATIQUES

Corrigé de l'exercice 6 :

1. $I_{23} = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^e = 1$

2. $I_{24} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin(3t)dt$.
   On linéarise la fonction à intégrer :
   $$\cos^2(t)\sin(3t) = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i}\right) = \frac{1}{4}\sin(5t) + \frac{1}{2}\sin(3t) + \frac{1}{4}\sin(t).$$
   D'où : $I_{24} = -\dfrac{1}{20}\left[\cos(5t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \dfrac{1}{6}\left[\cos(3t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \dfrac{1}{4}\left[\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{15}$.

3. $I_{25} = \displaystyle\int_0^{\pi} (\cos(2t) - \sin(2t))e^{-t}dt$.
   On recherche une primitive de la fonction à intégrer sous la forme, c'est à dire :
   $$F(t) = (A\cos(2t) + B\sin(2t))e^{-t}$$
   En exprimant le fait que $F'(t) = (\cos(2t) - \sin(2t))e^{-t}$, on obtient :
   $[(-A+2B)\cos(2t) + (-2A-B)\sin(2t)]e^{-t} = (\cos(2t) - \sin(2t))e^{-t}$,
   En divisant les deux membres par l'exponentielle (qui ne s'annule jamais), on identifie les deux polynômes trigonométriques $(-A+2B)\cos(2t) + (-2A-B)\sin(2t)$ et $\cos(2t) - \sin(2t)$.
   Cela nous donne : $-A+2B = 1$ et $-2A-B = -1$, c'est à dire $A = \dfrac{1}{5}$ et $B = \dfrac{3}{5}$,
   d'où $F(t) = \left(\dfrac{1}{5}\cos(2t) + \dfrac{3}{5}\sin(2t)\right)e^{-t}$.
   On a alors : $I_{25} = [F(t)]_0^{\pi} = \dfrac{e^{-\pi}-1}{5}$.

4. $I_{26} = \displaystyle\int_0^{\pi} t^2\cos(t)dt$. On applique deux intégrations par parties successives et l'on obtient :
   $$I_{26} = \left[t^2\sin(t)\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} t\sin(t)dt = -2\int_0^{\pi} t\sin(t)dt = -2\left(-\left[t\cos(t)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos(t)dt\right)$$
   Et enfin : $I_{26} = -2\left(\pi + [\sin(t)]_0^{\pi}\right) = -2\pi$

5. $I_{28} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx$.
   On décompose la fraction à intégrer en éléments simples et l'on obtient :
   $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$, avec $a = \dfrac{1}{2} = c$; $b = -\dfrac{1}{2}$.
   D'où : $I_{28} = \dfrac{1}{2}\left[\ln(x+1)\right]_0^1 - \dfrac{1}{4}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 + \dfrac{1}{2}\left[\arctan(x)\right]_0^1 = \dfrac{\ln(2)}{4} + \dfrac{\pi}{8}$